

Übungen

Abgabetermin: Freitag 16.7. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Gesetze der großen Zahlen und schwache Konvergenz

Die korrigierten Abgaben können ab Mittwoch, dem 21.7. bei Andrea Winkler (Raum 212) abgeholt werden. Die erreichten Punkte werden Ihrem Punktekonto als Zusatzpunkte gutgeschrieben.

Aufgabe 48 (4* Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $R(0, 1)$ -verteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{e} \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 49 (4* Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, integrierbarer Zufallsgrößen, so dass $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ P -f.s. gilt. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - E(X_n)| > n\varepsilon) < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 50 (6* Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $P^{X_1} = \delta_0$ und

$$P(X_n = n) = \frac{1}{2n \ln n} = P(X_n = -n), \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}$$

für $n \geq 2$. Zeigen Sie:

- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in Wahrscheinlichkeit
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))$ konvergiert nicht fast sicher gegen 0.

Hinweis: Benutzen Sie aus der Analysis: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$.

Aufgabe 51 (6* Punkte)

Seien $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Überprüfen Sie, ob Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

- $\mu_n = Poi(\alpha_n)$, $\alpha_n \in (0, \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \rightarrow \alpha$
- $\mu_n = f_n \mathbb{A}$ mit $f_n(x) = (1 - \cos(2\pi n x)) \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$
- $\mu_n = R[-n, n]$
- $\mu_n = \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n})$, $\mu \in \mathbb{R}$
- $\mu_n = \mathcal{N}(0, n)$